28 Μαΐου 2012

Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Απαντήσεις Θεμάτων Πανελληνίων Εξετάσεων Ημερησίων Γενικών Λυκείων

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 253

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 191

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 258

Α4. **α.** → Σωστό

β. → Σωστό

γ. → Λάθος

δ. → Λάθος

ε. → Λάθος

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Θέμα Β

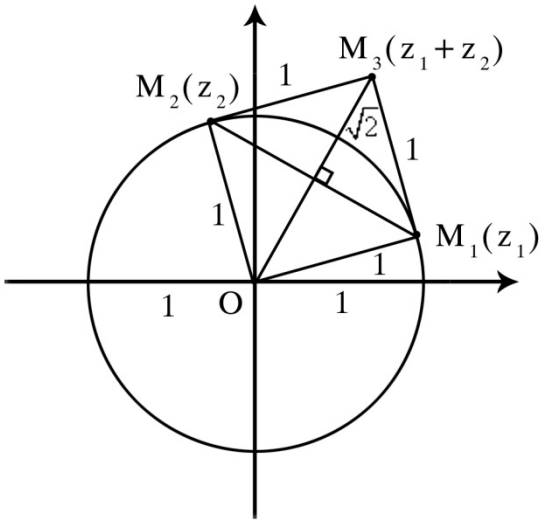
$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1)$$
$$|w-5\bar{w}|=12 \quad (2)$$

Β1. Έστω $z=x+yi$, $x, y \in \Re$

$$(1) \Leftrightarrow |x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4 \Leftrightarrow$$
$$|(x-1)+yi|^2+|(x+1)+yi|^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2=4 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+2y^2+2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2+1=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Οι εικόνες $N(z)$ κινούνται σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και $\rho=1$, δηλαδή στον μοναδιαίο κύκλο.

B2.



$|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$

$|z_1| = |z_2| = 1 \quad (3)$

$\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}, \quad \overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1} \quad (4)$

$|z_1 - z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)\cdot(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = 2 \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 \overset{(3)}{=} 2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 \Leftrightarrow$

$1 + 1 = 2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 = 0 \quad (5)$

οπότε $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\cdot(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 =$

$= |z_1|^2 + (z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1) + |z_2|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$

άρα $\boxed{|z_1 + z_2| = \sqrt{2}}$

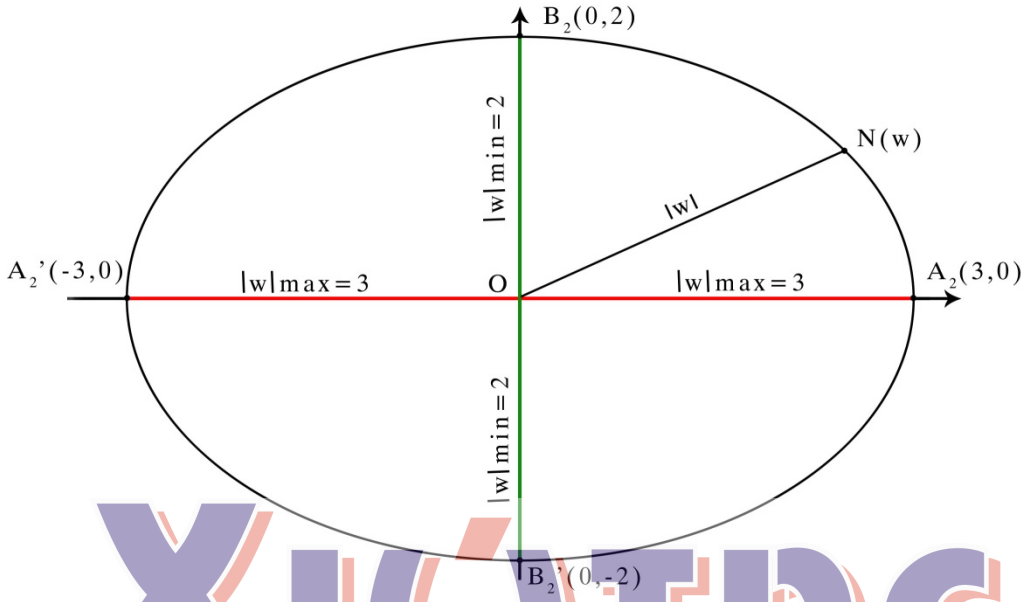
Γεωμετρικά

Αν $M_1(z_1), M_2(z_2)$ τότε $(M_1M_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και επειδή $(OM_1) = 1$ και $(OM_2) = 1$, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα άρα το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
Αν $M_3(z_1 + z_2)$ τότε το $OM_1M_3M_2$ είναι παραλληλόγραμο με ίσες πλευρές και ορθογώνιο, δηλαδή είναι τετράγωνο

Οπότε $|z_1 + z_2| = (OM_3) = (M_1M_2) = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{|z_1 + z_2| = \sqrt{2}}$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

B3.



Έστω $w = x + yi,\ \ x,y \in \Re$

$|w - 5\overline{w}| = 12 \Leftrightarrow |w - 5\overline{w}|^2 = 144 \Leftrightarrow |x + yi - 5(x - yi)|^2 = 144 \Leftrightarrow |-4x + 6yi|^2 = 144 \Leftrightarrow$

$16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{16x^2}{144} + \dfrac{36y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1}$

Επειδή η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ με α = 3 και β = 2 τότε,

αφού $|w| = (ON)$ όπου N(w) η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο

που ανήκει στην έλλειψη και είναι γνωστό

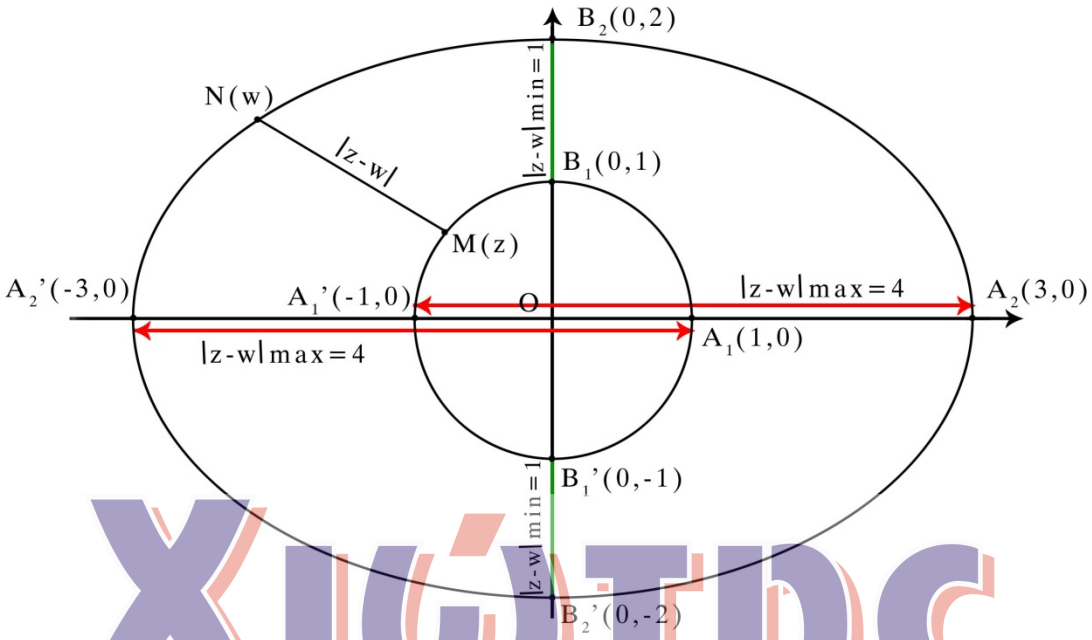
$\beta \le (ON) \le \alpha$ τότε $2 \le |w| \le 3$

άρα $|w|_{max} = 3 = (OA_2) = (OA_2')$

$|w|_{min} = 2 = (OB_2) = (OB_2')$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Β4.



ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ

Αφού $M(z)$ κινείται στον κύκλο και $N(w)$ κινείται στην έλλειψη τότε:

$(MN)=|z-w|$ και γεωμετρικά ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ (MN)\le(A_1'A_2)=(A_1A_2')=3+1=4\\ \bullet\ (MN)\ge(B_1B_2)=(B_1'B_2')=2-1=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\boxed{1\le(MN)\le4}$$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ |z-w|\le|z|+|w|\le1+|w|_{max}=1+3=4,\ \text{αφού}\ 2\le|w|\le3,\ |z|=1\\ \bullet\ |z-w|\ge\big||w|-|z|\big|=\big||w|-1\big|\ge|w|_{min}-1=2-1=1\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{1\le|z-w|\le4}$$

Θέμα Γ

Γ1.

$f(x)=(x-1)\ln x-1,\ \ x>0$

Η f παρ/ται στο $(0,+\infty)$ ως πράξη βασικών παρ/μων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\big((x-1)\ln x-1\big)'=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=\ln x+\frac{x-1}{x}=\frac{x\ln x+x-1}{x}$$

Για να βρω το πρόσημο της $f'(x)$ αρκεί να βρω το πρόσημο του αριθμητή.

Θέτω $g(x) = x\ln x + x - 1$

Αν $x \geq 1$: $x - 1 \geq 0$ και $x\ln x \geq 0$ αφού $\ln x \geq 0$ στο $[1,+\infty)$ και $x > 0$ στο $[1,+\infty)$

άρα $g(x) > 0$ ως άθροισμα θετικών στο $(1,+\infty)$ και $g(1) = 0$

οπότε $\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{g(x)}{x} > 0 \text{ στο } (1,+\infty) \\ f \text{ συνεχής στο } [1,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f \uparrow$ στο $[1,+\infty)$

Αν $0 < x < 1$: $\ln x < 0$, $x > 0 \Rightarrow x\ln x < 0$ και $x - 1 < 0$

άρα $g(x) = x\ln x + x - 1 < 0$ ως άθροισμα αρνητικών στο $(0,1)$

οπότε $\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{g(x)}{x} < 0 \text{ στο } (0,1) \\ f \text{ συνεχής στο } (0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow f \downarrow$ στο $(0,1]$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	ελάχιστο	$\nearrow$	

το $f(1) = (1-1)\ln 1 - 1 = -1$

$$f(\Delta_1) = f((0,1]) \overset{f\downarrow}{=} \left[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = [-1,+\infty)$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left((x-1)\ln x - 1\right) = +\infty$ διότι:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = -1 < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ οπότε } \lim_{x\to 0^+}\left((x-1)\ln x\right) = +\infty$$

$$f(\Delta_2) = f([1,+\infty)) \overset{f\uparrow}{=} \left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left((x-1)\ln x - 1\right) = +\infty$ διότι:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ οπότε } \lim_{x\to +\infty}\left((x-1)\ln x\right) = +\infty$$

Άρα $f((0,+\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$

Χιώτης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ2.

$$x^{x-1}=e^{2013}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}e^{\ln x^{x-1}}=e^{2013}\Leftrightarrow \ln x^{x-1}=2013\Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow (x-1)\ln x-1=2012\,(1)$$

Αν χρησιμοποιήσω την f του Γ_1 η (1) γράφεται: $f(x)=2012$

Επειδή $f(\Delta_1)=[-1\,,\,+\infty)$, το $2012\in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1\in(0\,,\,1]$ η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι $\downarrow$ στο $(0,1]$. άρα είναι $1-1$.

Επειδή $f(\Delta_2)=[-1\,,\,+\infty)$, το $2012\in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_2\in[1\,,\,+\infty)$ η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι $\uparrow$ στο $[1,+\infty)$. άρα είναι $1-1$.

Τελικά υπάρχουν ακριβώς 2 ρίζες της $f(x)=2012$, μία στο $(0,1]$ και μια στο $[1,+\infty)$ που είναι θετικές.

Γ3.

Αφού x_1,x_2 οι ρίζες της $f(x)=2012$

ισχύει $\begin{matrix} f(x_1)=2012 \\ f(x_2)=2012 \end{matrix}$

Θέτω $h(x)=f(x)e^x-2012e^x$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγισίμων στο $(0,+\infty)$

(f είναι παρ/μη όπως επεξηγήθηκε στο Γ1)

άρα είναι και συνεχής.

Θεωρώ το διάστημα $[x_1,x_2]$ και την συνάρτηση h

Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)

με $h'(x)=e^xf(x)+e^xf'(x)-2012e^x\ \ (1)$

$h(x_1)=f(x_1)e^{x_1}-2012e^{x_1}=2012e^{x_1}-2012e^{x_1}=0$

$h(x_2)=f(x_2)e^{x_2}-2012e^{x_2}=2012e^{x_2}-2012e^{x_2}=0$

οπότε $h(x_1)=h(x_2)$

άρα ισχύει Θ.Rolle για την h οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(x_1,x_2)$

τέτοιο ώστε $h'(x_o)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}e^{x_o}f(x_o)+e^{x_o}f'(x_o)-2012e^{x_o}=0\Leftrightarrow$

$$e^{x_o}\left(f(x_o)+f'(x_o)-2012\right)=0\overset{e^{x_o}\neq 0}{\Leftrightarrow}f(x_o)+f'(x_o)-2012=0\Leftrightarrow f(x_o)+f'(x_o)=2012$$

Χιώτης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ4.

$$g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x-1+1=(x-1)\ln x \quad (1)$$

Η C_g τέμνει τον x'x όταν $g(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (x-1)\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

$$E(\Omega)=\int_1^e |g(x)|\,dx=\int_1^e |(x-1)\cdot \ln x|\,dx$$

$$\overset{\substack{x-1>0 \text{ για } x>1 \\ \ln x>0 \text{ για } x>1}}{=} \int_1^e (x-1)\ln x\,dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)(\ln x)'\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)\cdot \ln e-\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot \ln 1-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\left[\left(\frac{e^2}{4}-e\right)-\left(\frac{1^2}{4}-1\right)\right]$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δ1.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα έχει αρχική στο $(0,+\infty)$

την $G(x)=\int_1^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη με $G'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)$

Η x^2-x+1 παραγωγίζεται στο $\Re$ και έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$, στο οποίο η G(x) είναι παραγωγίσιμη, οπότε: $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt=G\left(x^2-x+1\right)$

είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων με

$$\left(\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\right)'=G'\left(x^2-x+1\right)\left(x^2-x+1\right)'=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)$$

Χιώτης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Θέτω $g(x)=\int_{1}^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$

Η g παραγωγίζεται ως πράξη παραγωγισίμων

$$g'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{(x-x^2)'}{e}=$$

$$=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{(-2x+1)}{e}=$$

$$=(2x-1)\left[f(x^2-x+1)+\frac{1}{e}\right] \quad (2)$$

Παρατηρώ ότι

$$g(1)=\int_{1}^{1} f(t)dt-\frac{1-1}{e}=0$$

Τότε η δοσμένη ανίσωση γράφεται

$g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη άρα λόγω Θ. Fermat $g'(1)=0$.

$$g'(1)\overset{(2)}{=}1\left[f(1)+\frac{1}{e}\right]=0\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$, από συνέπεια του Θ. Bolzano η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$. Δείξαμε ότι $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, άρα $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$.

Οπότε $|f(x)|=-f(x)$

$$\ln x-x=-\left(\int_{1}^{x}\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)|f(x)|\Leftrightarrow$$

$$\ln x-x=-\left(\int_{1}^{x}\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)(-f(x))$$

Θα βρώ το πρόσημο της $\ln x-x=h(x)$

$$h'(x)=(\ln x-x)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

$h'(x)>0$ στο $(0,1)$ και $h'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$

οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το $h(1)=-1$,

δηλ. ισχύει $h(x)\leq h(1)=-1\Leftrightarrow h(x)<0$ στο $(0,+\infty)$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

αφού $\ln x - x < 0$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ θα ισχύει $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \neq 0$

οπότε : $f(x) = \dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}$ (1)

$\frac{\ln x - x}{f(x)}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών άρα έχει αρχική την $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$

που είναι παρ/μη οπότε και $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$ είναι παρ/μη

Ομοίως $\ln x - x$ παρ/μη στο $(0,+\infty)$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων.

$\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt,$ οπότε

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right)' \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

άρα από εφαρμογή σχ.βιβλίου, θα ισχύει:

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = ce^x, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x c} = \frac{e^{-x}(\ln x - x)}{c}, c \in \Re \quad (3)$$

αφού $f(1) = -\frac{1}{e} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{-1}(\ln 1 - 1)}{c} = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{1}{ec} = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow c = 1$

Τελικά $\boxed{f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x \in (0,+\infty)}$

Δ2.

$$f(x) = e^{-x}(\ln x - x) = \frac{\ln x - x}{e^x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x - x}{e^x} \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} -\infty \quad (3)$$

διότι $\lim_{x \to 0^+} e^x = e^0 = 1$ (1)

$\lim_{x \to 0^+} (\ln x - x) = -\infty$ (2)

Ισχύει $f(x) \neq 0$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ άρα $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Θέτω $u=\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{u}$ και έχω βρει $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=0$ δηλ. $\lim\limits_{x\to 0^+} u=0$ τότε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\left(\eta\mu\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)}\right)\right]=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u^2}(\eta\mu u-u)\right]=$$

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}=\left(\begin{array}{c}\lim\limits_{u\to 0^+}(\eta\mu u-u)=0\\ \lim\limits_{u\to 0^+}u^2=0\\ \eta\mu u-u,u^2 \text{ παρ/μη στο } (0,\alpha)\\ (u^2)'=2u\neq 0 \text{ στο } (0,\alpha)\end{array}\right)\overset{DLH}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{(\eta\mu u-u)'}{(u^2)'}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}$$

$$=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}\right)=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=\frac{1}{2}\cdot 0=\boxed{0}$$

Δ3.

$f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα έχει αρχική την

$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, $D_f=(0\,,\,+\infty)$ παραγωγίσιμη $F'(x)=f(x)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $F'(x)$ με:

$$\begin{aligned}F''(x)=f'(x)&=\left(e^{-x}(\ln x-x)\right)'\\&=\left(e^{-x}\right)'(\ln x-x)+e^{-x}(\ln x-x)'\\&=-e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\\&=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x+x\right)\\&=e^{-x}\left(\frac{1}{x}+x-1-\ln x\right)\end{aligned}$$

Από υπόθεση δίνεται ότι: $\ln x\le x-1 \Leftrightarrow x-1-\ln x\ge 0$

Ισχύει: $\frac{1}{x}>0$ στο $(0\,,\,+\infty)$

Άρα: $\frac{1}{x}+x-1-\ln x>0$ στο $(0,+\infty)$

$e^{-x}>0$ για κάθε x άρα και στο $(0\,,\,+\infty)$

Χιώτης ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Οπότε $\left.\begin{array}{l} F''(x)>0 \text{ στο } (0\,,\,+\infty) \\ F(x) \text{ συνεχής στο } (0\,,\,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$ F: κυρτή στο $(0\,,\,+\infty)$

Οπότε $F' \nearrow$ στο $(0\,,\,+\infty)$

Ισχύει $x>0$, άρα ορίζω τα διαστήματα: $[x\,,\,2x]$ και $[2x\,,\,3x]$ και τη συνάρτηση F.

F συνεχής στο $(0\,,\,+\infty)$ άρα και στα $[x\,,\,2x]$ και $[2x\,,\,3x]$

F παραγωγίσιμη στο $(0\,,\,+\infty)$ άρα και στα $(x\,,\,2x)$ και $(2x\,,\,3x)$

Ισχύει το Θ.Μ.Τ για την F σε καθένα από αυτά, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x\,,\,2x)$, $\xi_2 \in (2x\,,\,3x)$ τέτοια ώστε:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x} \quad (1)$$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x} \quad (2)$$

Όμως $F' \nearrow$ στο $(0\,,\,+\infty)$

$x<\xi_1<2x<\xi_2<3x$ οπότε:

$$\xi_1<\xi_2 \overset{F'\nearrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1)<F'(\xi_2) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x) \Rightarrow 2F(2x)<F(3x)+F(x)$$

Δ4.

Θεωρώ συνάρτηση: $h(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$ (1) και το $[\beta,2\beta]$

$F(x)$ συνεχής ως παρ/μη στο $(0,+\infty)$ άρα και η $h(x)$ συνεχής ως παρ/μη στο $(0,+\infty)$ οπότε και στο $[\beta,2\beta]$ (2)

- $h(\beta)=2F(\beta)-F(\beta)-F(3\beta)=F(\beta)-F(3\beta)>0$ διότι F παρ/μη με
  $F'(x)=f(x)<0$ (από Δ_1)
  $F(x)$ συνεχής στο $(0,+\infty)$
  άρα F $\searrow$ στο $(0,+\infty)$
  $\beta>0$ άρα $\beta<3\beta \overset{F\searrow}{\Rightarrow} F(\beta)>F(3\beta) \Leftrightarrow F(\beta)-F(3\beta)>0$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

- $h(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$ διότι στο Δ_3 αποδείξαμε ότι $F(x)+F(3x)>2F(2x)$ για κάθε $x>0$ άρα και για $x=\beta$ ισχύει:
  $F(\beta)+F(3\beta)>2F(2\beta)\Leftrightarrow 2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0 \quad (3)$

$(2),(3)\Rightarrow h(\beta)\cdot h(2\beta)<0$ οπότε ισχύει Θ. Bolzano άρα υπάρχει $\xi\in(\beta,2\beta)$ τ.ω.

$h(\xi)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}2F(\xi)-F(\beta)-F(3\beta)=0\Leftrightarrow 2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$

Ακόμα ισχύει $h'(x)=2F'(x)=2f(x)<0$

$h(x)$ συνεχής στο $(0,+\infty)$

άρα $h\downarrow$ στο $(0,+\infty)$

Οπότε είναι 1-1 άρα το ξ που βρήκα είναι μοναδικό.

ΧΙΩΤΗΣ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ